

## I Utilité de l'écriture fractionnaire

Certaines divisions ne "tombent pas juste", c'est à dire que le reste n'est jamais nul, le quotient n'est donc pas un nombre décimal et on ne peut écrire qu'une valeur approchée de ce nombre avec l'emploi de la virgule. Voir ici le cours de 6<sup>ème</sup> (II exemple2)

### Exemples:

- $2 : 3 = 0,66666.....$  On ne peut avoir qu'un quotient approché en écriture décimale.  $2 : 3 \approx 0,67$  est l'arrondi au centième.

Le quotient exact s'écrit en écriture fractionnaire  $2 : 3 = \frac{2}{3}$

- En écriture fractionnaire  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

En écriture décimale  $0,66666 + 0,33333 = 0,99999$  qui est différent de 1

L'écriture fractionnaire présente trois avantages :

- Donner des résultats exacts ,
- Simplifier l'écriture et ne pas faire des erreurs de recopie en oubliant des chiffres.
- Illustrer des proportions

## II Le quotient

### 1. Vocabulaire et définition

Le **quotient** d'un nombre décimal **a** par un nombre décimal **b** ( $\neq 0$ ) est le nombre **q** qui peut s'écrire  $q = a : b = \frac{a}{b}$

**a** s'appelle le **numérateur**

**b** s'appelle le **dénominateur** (il est toujours différent de 0)

$\frac{a}{b}$  est le quotient en **écriture fractionnaire**.

**On appelle fraction, une écriture fractionnaire dans laquelle les nombres a et b sont des nombres entiers.**

**Exemples :** Le quotient de 22 par 4 s'écrit  $22 : 4$  ou  $\frac{22}{4}$  mais aussi 5,5 en écriture décimale

Le quotient de 3,5 par 7 s'écrit  $3,5 : 7$  ou  $\frac{3,5}{7}$  mais aussi 0,5 en écriture décimale

Le quotient de 4,5 par 7 s'écrit  $4,5 : 7$  ou  $\frac{4,5}{7}$  mais n'a pas d'écriture décimale car cette division ne "tombe pas juste"

$\frac{22}{4}$ ,  $\frac{3,5}{7}$ ,  $\frac{4,5}{7}$  sont 3 quotients en écriture fractionnaire mais seule  $\frac{22}{4}$  est une fraction.

### Propriétés:

Si on multiplie une fraction par son dénominateur, on obtient son numérateur.

$$\text{Si } b \neq 0 \text{ alors } \frac{a}{b} \times b = a$$

Voir la 4<sup>ème</sup> question de [l'activité de 6<sup>ème</sup>](#)

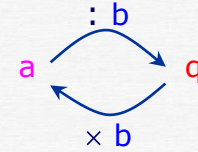
$$\frac{2}{3} \times 3 = 2, \quad \frac{22}{4} \times 4 = 22, \quad \frac{4,5}{7} \times 7 = 4,5$$

$$\frac{2014}{3018} \times 3018 = 2014$$

Si  $q$  est le quotient d'un nombre  $a$  par un nombre  $b$  alors  $a = b \times q$ .

Si  $\frac{a}{b} = q$  alors  $a = b \times q$

En effet



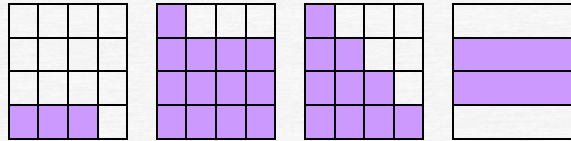
$$\frac{35}{7} = 5 \text{ et } 35 = 5 \times 7$$

$$\frac{22}{4} = 5,5 \text{ et } 22 = 4 \times 5,5$$

$$\frac{a}{7,2} = 3 \text{ donc } a = 7,2 \times 3 = 21,6$$

## 2. Illustration d'un quotient en écriture fractionnaire

**Fraction d'une grandeur**



La partie coloriée représente les  $\frac{3}{16}$  les  $\frac{10}{16}$  les  $\frac{10}{16}$  les  $\frac{2}{4}$  de chaque carré

**Notion de proportion**

Dans une classe de 25 élèves, il y a 13 filles. On dit que la **proportion** (ou la **fréquence**) des filles est de  $\frac{13}{25}$  ou que  $\frac{13}{25}$  des élèves de cette classe sont des filles.

## III Quotients égaux

### 1. la règle

Un quotient en écriture fractionnaire ne change pas si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre ( $\neq 0$ )

Phrase que l'on peut traduire par les formules

$a, b$  et  $k$  étant des nombres entiers

$$b \neq 0 \text{ et } k \neq 0 \quad \frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

### 2. Exemples

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times \dots}{4 \times \dots} =$$

On peut multiplier par n'importe quel nombre non nul

$$\frac{48}{36} = \frac{48 : 2}{36 : 2} = \frac{24}{18}$$

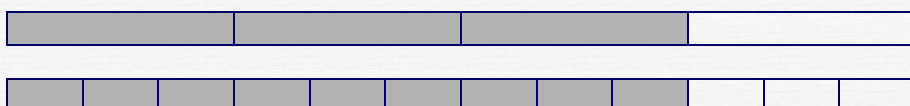
$$\frac{48}{36} = \frac{48 : 6}{36 : 6} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{48}{36} = \frac{48 : \dots}{36 : \dots} =$$

On peut diviser par n'importe quel nombre non nul

Des fractions qui donnent le même quotient sont appelées des **fractions équivalentes**

$$\frac{3}{4} \text{ et } \frac{9}{12}$$



**Exercices :**Ecrire 5 fractions équivalentes à  $\frac{5}{20}$  et à  $\frac{27}{18}$ 

$$\frac{5}{20} = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\frac{27}{18} = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

**3. Simplifier une fraction**

**On simplifie une fraction si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre.**

Rappel des critères de divisibilité (cours 6<sup>ème</sup> division I 3)

Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par les 2 derniers chiffres est divisible par 4

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

$$\frac{14}{22} = \frac{14 : 2}{22 : 2} = \frac{7}{11} \text{ est une fraction simplifiée}$$

$$\frac{222}{114} = \frac{222 : 2}{114 : 2} = \frac{111}{57} = \frac{111 : 3}{57 : 3} = \frac{37}{19}$$

On a utilisé les critères de divisibilité

$$\frac{1500}{25000} = \frac{15}{250} = \frac{15 : 5}{250 : 5} = \frac{3}{50}$$

On peut enlever 2 zéros (diviser par 100) puis par 5

La dernière fraction obtenue, que l'on ne peut plus simplifier, s'appelle une **fraction irréductible**.

**Comment rendre une fraction irréductible?**

- Comme précédemment, en divisant successivement par 2 ou 3 ou 5 ou 100 ...
- Par décomposition du numérateur et du dénominateur en produit de facteurs les plus petits possibles.

Exemple: simplifier  $\frac{27}{36} = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = (\text{en barrant les facteurs communs}) \frac{3}{4}$

**4. Comment transformer un quotient de nombres décimaux en fraction**

La règle d'égalité des quotients s'applique aussi si les nombres ont une virgule. Il suffira de multiplier par 10, 100, 1000 ... pour faire disparaître la virgule

$$\frac{3,2}{5} = \frac{3,2 \times 10}{5 \times 10} = \frac{32}{50}$$

$$\frac{7,35}{0,3} = \frac{7,35 \times 100}{0,3 \times 100} = \frac{735}{30}$$

$$\frac{1}{0,000001} = \frac{1 \times 1\,000\,000}{0,000001 \times 1\,000\,000} = \frac{1\,000\,000}{1} = 1\,000\,000$$

## IV Comparaison de fractions

### 1. Comparaison avec le nombre 1

$\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{1}{2}, \frac{45}{50}$ , sont toutes inférieures à 1 car le numérateur est plus petit que le dénominateur.

$\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{18}{7}, \frac{2579}{2412}$  sont toutes supérieures à 1 car le numérateur est plus grand que le dénominateur.

$\frac{4}{4}, \frac{7}{7}, \frac{15}{15}, \frac{578}{578}$ , sont toutes égales à 1 car le numérateur est égal au dénominateur.

a et b étant deux nombres positifs et  $b \neq 0$

si  $a < b$  alors  $\frac{a}{b} < 1$ , si  $a > b$  alors  $\frac{a}{b} > 1$  et si  $a = b$  alors  $\frac{a}{b} = 1$

### 2. Fractions ayant le même dénominateur

**Des fractions ayant le même dénominateur, sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs**

Exemples :  $\frac{14}{27} < \frac{16}{27}$  car  $14 < 16$

$\frac{35}{18} > \frac{31}{18} > \frac{20}{18} > \frac{11}{18}$  car  $35 > 31 > 20 > 11$

Concrètement, s'il faut partager 35 baguettes en 18 personnes, les parts seront plus grandes qu'avec 31 baguettes, elles même plus grande qu'avec 20 baguettes etc...

### 3. Fractions ayant le même numérateur

Si on partage maintenant 5 baguettes en 16 personnes, les parts seront plus petites que le partage des 5 baguettes en 14 personnes donc

$\frac{5}{16} < \frac{5}{14}$  car  $16 > 14$

De même  $\frac{18}{35} < \frac{18}{31} < \frac{18}{20} < \frac{18}{11}$  car  $35 > 31 > 20 > 11$

**Des fractions ayant le même numérateur, sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs**

### 4. Fractions ayant des dénominateurs et numérateurs différents

Exemple: Comparer  $\frac{7}{5}$  et  $\frac{22}{15}$ .

Il faudra les transformer en fractions ayant le même dénominateur:

$\frac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{21}{15}$  et  $\frac{21}{15} < \frac{22}{15}$  donc  $\frac{7}{5} < \frac{22}{15}$

**Exercice :**

Ranger dans l'ordre croissant:  $\frac{9}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{2}$  et 1

*Indications: penser d'abord à comparer avec 1*

*Ordre croissant=du plus petit au plus grand*

# V Division de 2 nombres décimaux

On veut poser la division de 7,35 par 0,2.

En écriture fractionnaire on peut écrire

$$7,35 \overline{) 0,2}$$

$$7,35 : 0,2 = \frac{7,35}{0,2} = \frac{7,35 \times 100}{0,2 \times 100} = \frac{735}{20} = 735 : 20$$

$$\begin{array}{r} 735, \overline{) 20} \\ 13 \phantom{5} \\ \underline{135} \phantom{0} \\ 150 \\ 100 \\ \underline{100} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \hline 36,75 \end{array}$$

**36,75 est le quotient décimal exact** de 7,35 par 0,2

Autre exemple où le quotient "ne tombe pas juste"; **38,7 : 1,1** qui devient **387 : 11**

$$\begin{array}{r} 387,0000 \overline{) 11,} \\ 05 \phantom{0000} \\ \underline{05} \phantom{0000} \\ 07 \phantom{0000} \\ 02 \phantom{0000} \\ \underline{02} \phantom{0000} \\ 00 \phantom{0000} \\ 09 \phantom{0000} \\ \underline{09} \phantom{0000} \\ 00 \phantom{0000} \\ 02 \phantom{0000} \\ \underline{02} \phantom{0000} \\ 00 \phantom{0000} \\ 09 \phantom{0000} \\ \underline{09} \phantom{0000} \\ 00 \phantom{0000} \\ 02 \phantom{0000} \\ \underline{02} \phantom{0000} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11, \\ \hline 35,1818 \end{array}$$

On a  **$q \approx 35,1818...$**

On voit qu'il y a toujours les mêmes restes, tantôt 2 tantôt 9 et que cette division ne se termine jamais.

**35, 1818 est un quotient décimal approché**

Lorsqu'un quotient n'est pas exact, il y a plusieurs façons d'exprimer sa valeur décimale approchée :

- par **un encadrement**
- par **un arrondi**
- par **une troncature**

