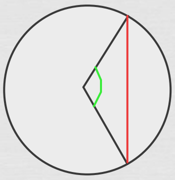
TRIGONOMÉTRIE

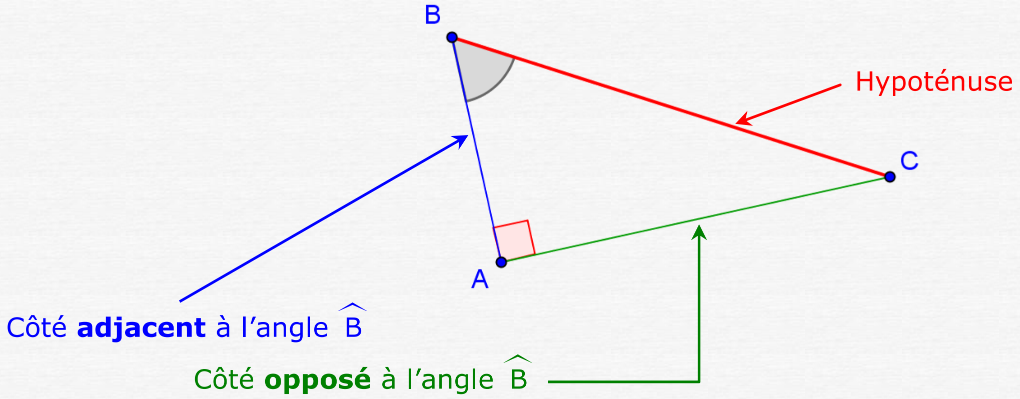


Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).
On attribue à ***Hipparque de Nicée*** (-190 ; -120) les premières tables de trigonométrie. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
Le grec ***Claude Ptolémée*** (85 ; 165) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien ***Regiomontanus***, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.

Revoir l'activité cosinus de 4ème

I Définitions

ABC est un triangle rectangle en A



Dans un triangle rectangle, à **chaque angle aigu** on fait correspondre 3 nombres appelés cosinus, sinus et tangente de l'angle et définis par

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

on note

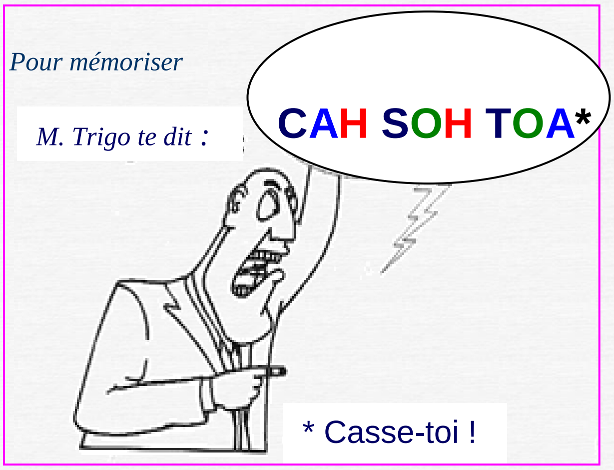
$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

On pourra écrire de même $\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC}$

$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC}$

et $\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC}$

En revanche on ne peut pas écrire ces 3 formules pour l'angle droit.



Voir une illustration de la trigonométrie avec Géogébra ici

II Propriétés

1. Ces trois nombres sont des rapports de longueurs, ils sont donc positifs.
De plus, l'hypoténuse étant plus grande que les 2 autres côtés, les quotients cosinus et sinus sont plus petits que 1. En résumé :

α (se lit alpha) **étant un angle aigu**,

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < \sin \boldsymbol{\alpha} < 1 \\ 0 < \cos \boldsymbol{\alpha} < 1 \\ \tan \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0} \end{array}}$$

2. On peut remarquer d'après les définitions que $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$ et $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$

Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ étant complémentaires *($\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$)* on peut dire que

> Si 2 angles sont complémentaires,
> le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre

En particulier, sin 30° = cos 60° ou cos 10° = sin 80° ou encore sin 45° = cos 45° …..

3. $(\cos \alpha)^2$ se note $\cos^2 \alpha$ et de même $(\sin \alpha)^2$ se note $\sin^2 \alpha$
Dans le triangle ABC rectangle en A du paragraphe I, exprimons $\cos^2 \widehat{B}$ et $\sin^2 \widehat{B}$.

$\cos^2 \widehat{B} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$ et $\sin^2 \widehat{B} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$ et calculons la somme de ces 2 carrés.

$$\mathbf{\cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$. On a donc

$$\cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B} = \frac{BC^2}{BC^2} = \mathbf{1}$$

Quel que soit l'angle aigu α, $\boxed{\cos^2 \boldsymbol{\alpha} + \sin^2 \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}}$

4. Calculons $\dfrac{\mathbf{\sin \widehat{B}}}{\mathbf{\cos \widehat{B}}} = \dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$ *(en simplifiant par BC)* c'est aussi $\mathbf{\tan \widehat{B}}$

Quel que soit l'angle aigu α $\boxed{\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$

III Ce qu'il faut savoir faire avec la calculatrice

1. Chercher le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle donné

Il faut s'assurer que la calculatrice est en mode « degré », ***(lettre D à l'affichage)***

On cherche	On tape	affichage	On écrit
le sinus de 37°	sin 3 7 EXE	0.6018150232	**sin37° ≈ 0,60** à 0,01 près
le cosinus de 37°	cos 3 7 EXE	0.79863551	**cos37° ≈ 0,799** à 0,001 près
la tangente de 37°	tan 3 7 EXE	0.7535540501	**tan37° ≈ 0,75** à 0,01 près

2. Chercher un angle connaissant son sinus ou son cosinus ou sa tangente

On va utiliser les fonctions inverses de sinus, cosinus et tangente notées Asn, Acs et Atn accessibles sur les mêmes touches de la calculatrice par la fonction « seconde » ou « shift ».

On cherche	On tape	affichage	On écrit
l'angle α sachant que $\sin \alpha = 0,65$	SECONDE sin (Asn) • 6 5 EXE	40.54160187	$\sin \alpha = 0,65$ d'où **$\alpha \approx 41°$** à 1 degré près
l'angle x sachant que $\cos x = 0,5$	SECONDE cos (Acs) • 5 EXE	60	Cos $x = 0,5$ d'où **$x = 60°$**
l'angle y sachant que $\tan y = \frac{4}{3}$	SECONDE tan (Atn) 4 ▭ (ou ÷) 3 EXE	53.13010235	$\tan y = \frac{4}{3}$ d'où **$y \approx 53°$** à 1 degré près

Certaines calculatrices nécessitent de refermer les parenthèses avant *exe*

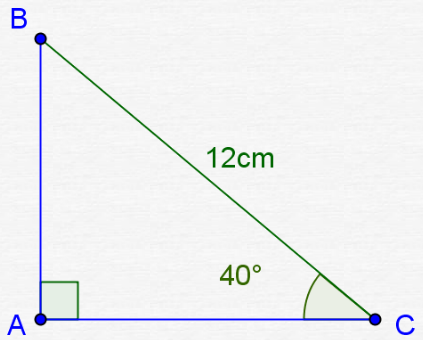
IV Ce qu'il faut savoir calculer dans un triangle rectangle

Les formules trigonométriques, mettent en relation des angles et des longueurs, elles vont donc permettre de calculer un angle ou une longueur dans un triangle rectangle. Après le théorème de Pythagore, la trigonométrie est l'autre outil de calcul dans le triangle rectangle.

1. Calculer un côté connaissant un côté et un angle

Exemple1

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\widehat{C} = 40°$ et AC = 12cm. Calculer la longueur AB.



La méthode :

On connaît l'angle $\widehat{C}$, *(donc aussi son sinus, son cosinus et sa tangente)*
et l'hypoténuse BC,
on cherche le côté opposé, AB.

Ces 3 nombres se trouvent dans la formule du sinus :

sinus=$\frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}}$. Exprimons le sinus de l'angle $\widehat{C}$

$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC}$ d'où $\sin 40° = \frac{AB}{12}$ on va utiliser l'égalité des produits en croix

$\frac{\sin 40°}{1} = \frac{AB}{12}$ d'où AB x 1 = 12 x sin40° *(ce calcul se fait avec la calculatrice)*

(en arrondissant) **AB ≈ 7,7cm** à 1mm près

Dans le même triangle, calculer de la longueur AC

On connaît l'angle $\widehat{C}$, et l'hypoténuse BC, et on cherche le côté adjacent, AC. Ces 3 nombres se trouvent dans la formule du cosinus : **cosinus = $\frac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypoténuse}}$.**

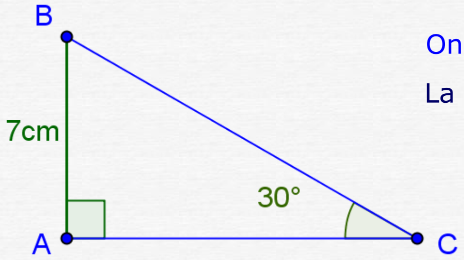
Exprimons le cosinus de l'angle $\widehat{C}$

$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC}$ d'où $\cos 40° = \frac{AC}{12}$ d'où *(toujours le produit en croix)* AC = 12 x cos40°

AC ≈ 9,2cm à 1mm près

Exemple2

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\widehat{C} = 30°$ et AB = 7cm.
Calculer la longueur AC puis BC.



On connaît l'angle $\widehat{C}$, le côté opposé et on cherche le côté adjacent.

La formule qui convient ici est **tangente =** $\frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{côté adjacent}}$

$\tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC}$ d'où $\tan 30° = \frac{7}{AC}$ *(toujours le produit en croix)*

AC x tan30° = 7 et AC = $\frac{7}{\tan 30°}$ **AC ≈ 12,1cm** à 1mm près

Calcul de BC; on connaît l'angle $\widehat{C}$, le côté opposé et on cherche le l'hypoténuse.

La formule qui convient est ici **sinus=**$\frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}}$

$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC}$ d'où $\sin 30° = \frac{7}{BC}$ *(toujours le produit en croix)* BC x sin30° = 7 et BC = $\frac{7}{\sin 30°}$

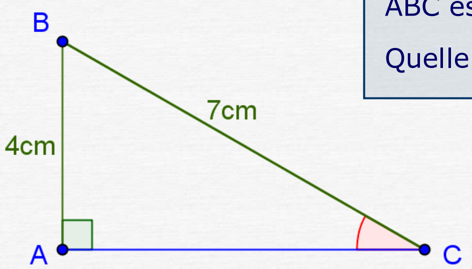
BC = 14cm

***Remarque** : On aurait pu aussi calculer BC à l'aide du théorème de Pythagore (les longueurs AB et AC étant connues)*

2. Calculer un angle connaissant deux côtés

ABC est un triangle rectangle en A. On donne AB = 4cm et BC =7cm

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{C}$? En déduire celle de l'angle $\widehat{B}$



La méthode est la même que précédemment, on regarde ce qui est donné et ce qui est cherché, et on écrit la formule trigonométrique correspondante.

On cherche l'angle $\widehat{C}$, on connaît le côté opposé et l'hypoténuse

C'est la formule sinus qui convient : **sinus=**$\frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}}$

$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC}$ d'où $\sin\widehat{C} = \frac{4}{7}$ et $\widehat{C}$ **≈ 35°** à 1° près. *(voir III 2.)*

Les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ étant complémentaires on déduit aisément $\widehat{B}$ **≈ 65°**

Pour en savoir plus sur la [trigonométrie]