RACINE CARREE

I Racine carrée d'un nombre positif

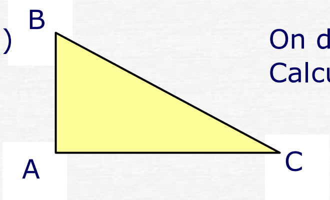
1. Définition

a étant un nombre positif, le nombre $\sqrt{a}$ (racine carrée de a) est le nombre positif dont le carré est a.
$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{\ }$ s'appelle un radical
le nombre *a* doit être positif, donc $\sqrt{-2}$ n'a pas de sens.
$\sqrt{3}$ est le nombre positif dont le carré est 3. $(\sqrt{3})^2 = 3$
De tête, $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{0,36} = 0,6$
Avec la calculatrice $\sqrt{30,25} = 5,5$ $\sqrt{2} \approx 1,414$

2. Exercices

a)



On donne $AB = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{11}$
Calculer la longueur BC

b) l'aire d'un carré est de 10 cm², quelle est la valeur exacte de son côté ?
c) Donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{3}$, de $\sqrt{360}$
d) Ecrire sans radical $\sqrt{\frac{8}{18}}$; $\sqrt{\frac{12}{147}}$; $(\sqrt{5})^2$ $(-\sqrt{5})^2$; $\sqrt{3^2}$; $\sqrt{(-3)^2}$

3. Propriété

Pour tout nombre a positif $\sqrt{a^2} = a$

On pourra noter que si a est négatif, a² est positif et $\sqrt{a^2} = $ **$-a$** (qui est un nombre positif)

II Opérations avec les radicaux

1. Produit et quotient

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$

Exemples :

* $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$
* $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{4}}$
* $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{21}{27}} = \sqrt{\frac{3 \times 7}{3 \times 9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{3}}$

* **Simplifier l'écriture** (pour que le nombre sous le radical soit le plus petit possible)

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$ que l'on note **$3\sqrt{2}$**
$\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = \sqrt{3} \times 5 = $ **$5\sqrt{2}$**
refaire cet exercice pour $\sqrt{20}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $3\sqrt{50}$

2. Somme et différence

Y a-t-il la même règle pour l'addition et la soustraction ?
Calculons $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ et $\sqrt{16 + 9}$.
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = \mathbf{7}$; $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ donc $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

et plus généralement **$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$**

3. Exercices

a) Réduire les expressions

- $4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} =$ *(observer qu'il y a dans cette somme un facteur commun)*
- $\sqrt{8} + \sqrt{2} =$ *(penser à simplifier $\sqrt{8}$)*
- $3\sqrt{12} + \sqrt{2} - 2\sqrt{75} =$ *(observer qu'on a déjà transformé $\sqrt{12}$ et $\sqrt{75}$ ci-dessus)*

b) Développer et réduire

- $(3\sqrt{2})^2$ $\longrightarrow$ *penser aux formules des puissances*
- $(3 + \sqrt{2})^2$
- $(\sqrt{5} - 2)^2$
- $(3\sqrt{5} + 4)^2$
- $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} - 4)$

Penser au identités remarquables

c) Factoriser

- $x^2 - 11$

Problème

Calculer la valeur exacte de la diagonale d'un carré de côté 4cm, puis de côté a.
En déduire la valeur exacte de sin45°

III La grande famille des nombres

Avec des nombres comme $\sqrt{2}$, les Grecs de l'antiquité ont eu de sérieux problèmes. En effet, tous les nombres qu'ils connaissaient, s'écrivaient sous forme fractionnaire. Lorsqu'ils se sont rendu compte que $\sqrt{2}$ ne rentre pas dans ce cadre, ils l'ont qualifié de « non énonçable » et l'on caché pendant des siècles.
Aujourd'hui, $\sqrt{2}$ et ses semblables ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$…..) s'appellent des **nombres irrationnels**.
Dans la même famille on sait depuis le 18$^{\text{ème}}$ siècle qu'il y a le nombre π.
On appelle donc **nombres rationnels** tous ceux qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire. Ils contiennent bien sur les **nombres décimaux**, (tout nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction : $6{,}25 = \frac{625}{100}$) qui contiennent eux même tous les **nombres entiers** (tout nombre entier est aussi un nombre décimal qui s'ignore 17 = 17,0)
Dans chacune de ces familles les nombres peuvent être positifs ou négatifs, on les appellent alors des **nombres relatifs**.

<table>
<tr><td rowspan="4">Nombres rationnels</td><td rowspan="3">Décimaux relatifs</td><td rowspan="2">Entiers relatifs</td><td>Entiers Naturels</td><td>0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ……… ; $\frac{24}{2}$ …………</td></tr>
<tr><td>Entiers négatifs</td><td>0 ; -1 ; -2 ; -3 ; …….. ; - -$\frac{18}{3}$…..</td></tr>
<tr><td colspan="2">Non entiers</td><td>3,2 ; -6,25 ; ………. ; $\frac{7}{2}$;- $\frac{34}{100}$ ……..</td></tr>
<tr><td colspan="3">Non décimaux</td><td>$\frac{1}{3}$; $\frac{9}{7}$; - -$\frac{4}{9}$; …..tous les quotients qui ne « tombent pas juste »</td></tr>
<tr><td>Nombres irrationnels</td><td colspan="4">$\sqrt{2}$; -$\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$ …………..- $\sqrt{12}$; π ; - π ; …………</td></tr>
</table>