FONCTION LINEAIRE

I Synthèse sur la proportionnalité

1. Exemple

Grandeur A	5	20	12,5	-10	x
Grandeur B	4	16	10	-8	0,8 x

X 0,8

Ceci est un tableau de proportionnalité car $\frac{4}{5} = \frac{16}{20} = \frac{10}{12{,}5} = \frac{-8}{-10} = 0{,}8$

Deux grandeurs A et B sont proportionnelles si chaque nombre de B s'obtient en multipliant un nombre de A par le même nombre appelé coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité = $\dfrac{\text{nombre d'en bas}}{\text{nombre d'en haut}}$

2. Calcul d'un nombre manquant

Sur une carte routière, une distance de 50km est représentée par un segment de 7cm.
Quelle est la distance entre 2 villes séparées sur la carte par 10cm ?

Les distances sur la carte et réelles sont proportionnelles.

Sur la carte	en cm	7	10
Dans la réalité	en km	50	x

x …

Les méthodes :

- L'égalité des produits en croix : 7 x x = 50 x 10 d'où $x = \frac{50 \times 10}{7} \approx 71$ km
- La règle de trois : (raisonnement par retour à l'unité)
  7cm correspondent à 50km
  donc 1cm à 7 fois moins $\longrightarrow \frac{50}{7}$ et 10cm, 10 fois plus $\longrightarrow \frac{50}{7} \times 10 \approx 71$ km
- Avec le coefficient de proportionnalité : a = $\frac{50}{7}$ et $x = 10 \times \frac{50}{7} \approx 71$ km

3. Modélisation d'une situation de proportionnalité

Le tableau de l'exemple 1. peut se traduire par une fonction *f*, pour laquelle 5 a pour image 4, 20 a pour image 16,….

$f : 5 \longrightarrow 4$
$f : 20 \longrightarrow 16$
………
$f : x \longrightarrow 0{,}8x$ ou $f(x) = 0{,}8x$

Cette fonction s'appelle une **fonction linéaire**.
On dit que la fonction *f* **modélise** la situation de proportionnalité

II Fonction linéaire

1. Définition

a étant un nombre relatif donné, la fonction linéaire de coefficient a, est la fonction qui au nombre x associe le nombre ax

On note : f : $x \longmapsto ax$ ou $f(x) = ax$

L'image d'un nombre x s'obtient en multipliant x par le coefficient a $\quad x \xrightarrow{\text{x a}} ax$

2. Exemples :

Soit la fonction linéaire f de coefficient 3.
On note f : $x \longmapsto 3x$ ou $f(x) = 3x$

- Calculer une image :
  Calculer l'image de 2 : $f(2) = 3 \text{ x } 2 =$ **6**
  De même l'image de -5 est $f(-5) = 3 \text{ x } (-5) =$ **-15**
  et l''image de 0 est $f(0) = 3 \text{ x } 0 =$ **0**

- Calculer un antécédent :
  Quel est l'antécédent de 24 par la fonction f ?
  Soit x cet antécédent, on a $f(x) = 3x$ et $f(x) = 24$ donc $3x = 24$ d'où $x =$ **8**
  Calculons de même l'antécédent de 7 : $f(x) = 3x = 7$ d'où $x = \mathbf{\frac{7}{3}}$

  A l'aide des opérateurs :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\text{x } 3"] & 3x \arrow[l, bend left, ": 3"] \end{tikzcd}$$

On remarque que dans tous les cas il n'y a qu'un seul antécédent

- Comment trouver le coefficient d'une fonction linéaire ?
  On donne une fonction linéaire g pour laquelle 8 a pour image 2 (ou $g(8) = 2$)
  Quel est son coefficient ?
  Soit a le coefficient, on a $g(x) = ax$ d'où $g(8) = a \text{ x } 8$,
  comme $g(8) = 2$, on en déduit que a x 8 = 2 et donc $a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

III Propriétés des fonctions linéaires

f étant une fonction linéaire, x_1 et x_2 étant 2 nombres, k étant un nombre	$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ et $f(kx) = k\,f(x)$

Ces 2 propriétés sont la modélisation de situations déjà connues :
Exemple :

	+		+	X 10
Nombre de pains	1	3	4	40
Prix du pain en €	1,40	4,20	5,6	56
	+		+	X 10

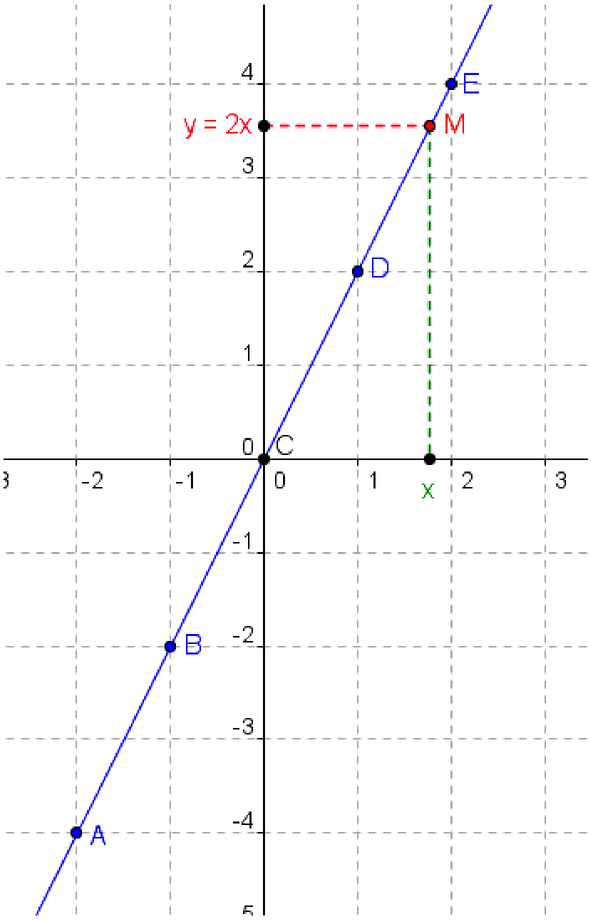
IV Représentation graphique

1[er] exemple : Représenter graphiquement la fonction $f(x) = 2x$

tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2	x
$f(x)$	-4	-2	0	2	4	$2x$
	A	B	C	D	E	M

X 2



Dans un repère du plan, on place les points A(-2 ;-4), B(-1 ;-2), C(0 ;0), D(1 ;2) et E(2 ;4), on peut remarquer qu'il sont alignés sur une droite qui passe par l'origine du repère.

La représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = \mathbf{a}x$ est une droite qui passe par l'origine.
Le nombre **a** s'appelle le **coefficient directeur** de la droite

Tous les points de coordonnées (x ; y) avec y = $f(x) = 2x$ se trouvent sur cette droite et réciproquement,
Pour tout point M(x ; y) de la droite, on a y = $2x$

y = $2x$ s'appelle **l'équation de la droite**.

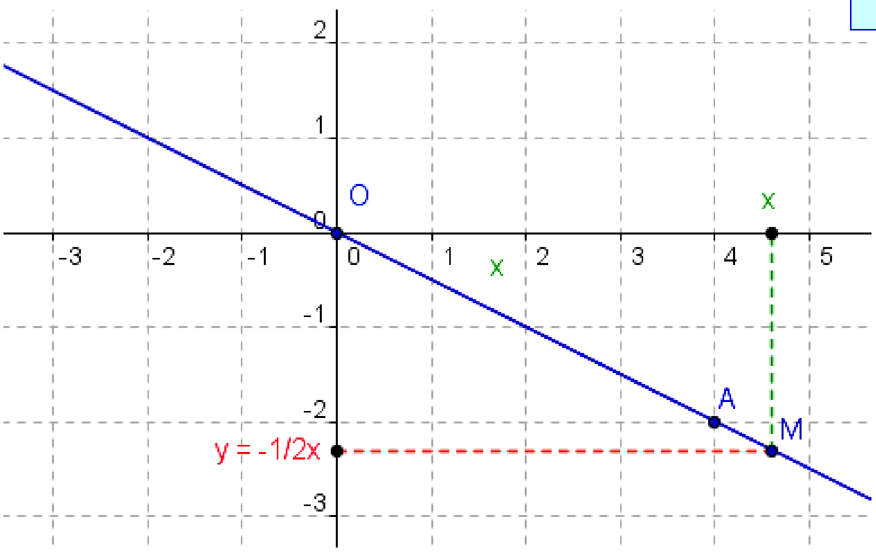
A retenir :
Si un point appartient à une droite, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

2[ème] exemple : Représenter graphiquement la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x$

Deux points suffisent

x	0	4
$f(x)$	0	-2
	O	A

X $-\frac{1}{2}$

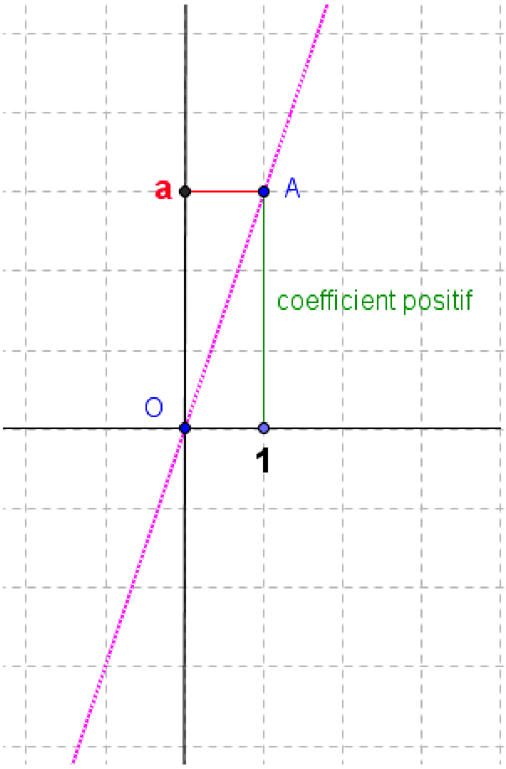


En plus du point d'origine (0 ; 0), il suffit de placer un seul point A en prenant une abscisse quelconque x et en calculant son ordonnée y = $-\frac{1}{2}x$

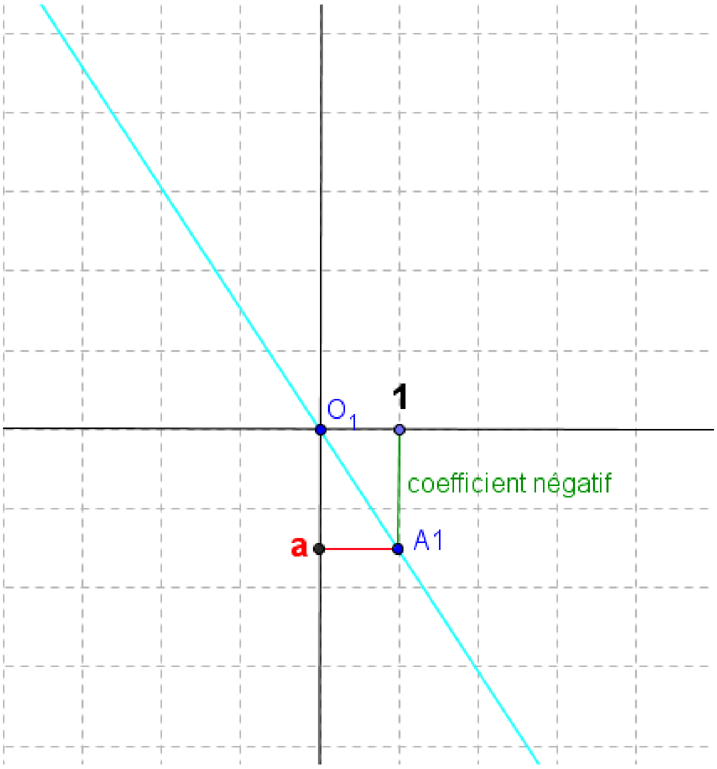
Ici on a pris $x = 4$

et $y = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Influence du coefficient directeur :



Le coefficient directeur est positif ;
La droite « monte »



Le coefficient directeur est négatif ;
La droite « descend »

On peut lire le coefficient directeur sur le graphique : c'est **l'ordonnée du point A d'abscisse 1**.
En effet, la droite représente la fonction linéaire $f(x) = \mathbf{a}x$. Pour $x = 1$, $f(1) = \mathbf{a} \times 1 = \mathbf{a}$

On lit ici **a** = 3 donc $f(x) = \mathbf{3}x$

On lit ici **a** = -1,5 donc $f(x) = \mathbf{-1{,}5}x$

Voir aussi l'animation avec géogébra

V Pourcentages

Rappel : $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

1 prendre les 5% d'un nombre x

C'est multiplier ce nombre par 5% donc $x \times 5\% = x \times \frac{5}{100} = \boxed{x \times \mathbf{0{,}05}}$

On peut modéliser cette situation par la fonction $f : x \longmapsto 0{,}05x$

2 Augmenter un nombre x de 5%

Le nombre x devient $x + 0{,}05x = x(1 + 0{,}05) = \boxed{x \times \mathbf{1{,}05}}$

1,05 est un **coefficient de hausse**
On peut modéliser cette situation par la fonction $f : x \longmapsto 1{,}05x$

3 Diminuer un nombre x de 5%

Le nombre x devient $x - 0{,}05x = x(1 - 0{,}05) = \boxed{x \times \mathbf{0{,}95}}$

0,95 est un **coefficient de baisse**
On peut modéliser cette situation par la fonction $f : x \longmapsto 0{,}95x$

Poucentage %	5	10	15	25	50	90	100	**p**
Coefficient de hausse	1,05	1,10	1,15	1,25	1,50	1,90	2	**1 + p%**
Coefficient de baisse	0,95	0,90	0,85	0,75	0,50	0,10	0	**1 - p%**

Exemples :
1) *Un collège de 500 élèves voit son effectif augmenter de 10%. Combien aura-t-il d'élèves après cette augmentation ?*
Pour une hausse de 10%, le coefficient de hausse est de 1+10% = 1,10
Le nombre d'élèves sera de 500 x 1,10 = **550**

2) *L'année suivante son effectif est en baisse de 10%. Retrouvera t-il son effectif initial ?*
Pour une baisse de 10%, le coefficient est 1 – 10% = 0,90.
Le nombre d'élèves sera de 550 x 0,90 = **495.** Il aura donc moins d'élèves qu'il n'en avait 2 ans auparavant.

Remarque : une hausse de 10%, suivie d'une baisse de 10% ne donne pas le nombre initial.

3) *Un rabais de 15% est appliqué sur un article de 220€. Quel sera le nouveau prix ?*
15% de baisse correspond à un coefficient de 1 – 15% = 0,85.
Le nouveau prix sera de 220 x 0,85 = **187€**

A quelle baisse correspond un coefficient de 0,70 ?

0,70 correspond à une baisse de 1 – 0,70 = 0,30 = $\frac{30}{100}$ = **30%**

4 Recherche du prix initial

Un article soldé à 20% coute 52€. Quel était le prix initial ?
Désignons par x le prix initial. x a subi une baisse de 20% donc un coefficient de baisse de 0,80
On doit donc écrire x x 0,80 = 52
On en déduit que x = 52 : 0,80 = **65€**
Ne pas faire l'erreur d'augmenter le nouveau prix de 20% ; calcul qui ne traduit pas l'énoncé « soldé »

5 Recherche du pourcentage

Un article de 25€ est soldé à 15€. Quel est le pourcentage de baisse ?
Désignons par k le coefficient de baisse.

On a 25 x k = 15 On en déduit que $k = \frac{15}{25}$ = 0,60.

Le coefficient 0,60 correspond à une baisse de 1 – 0,60 = 0,40 = **40%**

Un article de 120€ est soldé à 100€, la baisse est elle de 20% ?

Même raisonnement : 120 x k = 100 d'où $k = \frac{100}{120} \approx 0,83$ donc la baisse n'est que de ≈ 17%

6 Problèmes

- En se congelant, l'eau augmente son volume de 7,5%.Un cube de glace a une arête de 22cm. Combien de litres d'eau obtient on en le faisant fondre ?

- La population x d'une ville subit une augmentation de 15% puis une baisse de 14% l'année suivante ? Y aura-t-il plus ou moins d'habitants ? Justifier.
  De quel pourcentage cette population aura-t-elle varié après ces 2 fluctuations ?

- Chez l'opticien on lit « votre âge = votre pourcentage de remise sur votre monture »
  Une cliente paye 74,25€ une monture dont le prix réel est 165€. Quel est son âge ?