# ARITHMETIQUE

## I Diviseurs d'un entier

La **division euclidienne** d'un nombre a par un nombre b s'exprime par l'égalité **a = b x q + r**
Ces 4 nombres sont entiers positifs et **r < b**

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

*(pour le détail voir la leçon en 6ème)*

Lorsque la division tombe juste (r = 0), on dit que

- le nombre **a** est un multiple du nombre **b**
- le nombre **a** est divisible par le nombre **b**
- le nombre **b** est un diviseur du nombre **a**
- et **a = b x q**

### 1. Définition :

a et b étant deux nombres entiers positifs,
b est un diviseur de a lorsque le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier q ou si a = b x q

### 2. Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 1\ 1 & 3 \\ \hline 2\ 1 & 3\ 7 \\ 0 & \end{array}$$

3 est un diviseur de 111
On peut écrire 111 = 3 x 37

*Remarque :*
*37 devient aussi un diviseur de 111*

$$\begin{array}{r|l} 3\ 8 & 4 \\ \hline 2 & 9 \end{array}$$

Dans cet exemple, il y a un reste de 2
4 n'est pas un diviseur de 38

### 3. Les critères de divisibilité : *voir aussi le cours de 6ème*

Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

### 4. Liste des diviseurs d'un nombre entier :

*La méthode* : écrire tous les produits de 2 facteurs qui donnent le nombre

Diviseurs de 36

36 = **1** x **36**
36 = **2** x **18**
36 = **3** x **12**
36 = **4** x **9**
36 = **6** x **6**

La liste des diviseurs de 36 est :
**1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36**

Diviseurs de 48

48 = **1** x **48**
48 = **2** x **24**
48 = **3** x **16**
48 = **4** x **12**
48 = **6** x **8**

La liste des diviseurs de 48 est :
**1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48**

Diviseurs de 23

23 = 1 x 23

23 n'a que deux diviseurs 1 et lui-même :
Un tel nombre est appelé **nombre premier**

Un nombre premier est un nombre entier qui admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui même

**Exemples de nombres premiers:** 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ….

# II Diviseurs communs à 2 entiers

**Remarque :** 1 est un diviseur de tous les entiers
Regardons dans les exemples précédents,
les diviseurs de 36 $\longrightarrow$ 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36
les diviseurs de 48 $\longrightarrow$ 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

Les nombres 36 et 48 ont en communs les diviseurs: 1 ; 2 ; 4 ; 6 et **12**

12 est le plus grand diviseur commun de 36 et 48, on l'appelle le **PGCD** de 36 et 48
On note **PGCD (36 ; 48) = 12**

Exemples à trouver mentalement :
PGCD (12 ; 18) = 6
PGCD (50 ; 25) = 25
PGCD (14 ; 18) = 2
PGCD (27 ; 14) = 1

Lorsque le PGCD de deux nombres est 1, ces deux nombres sont appelés premiers entre eux

**Propriétés :**

a et b étant deux nombres entiers strictement positifs,
PGCD (a ; a) = a
PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a)
Si b est un diviseur de a alors PGCD (a ; b) = b

# III Recherche du PGCD

**1. Mentalement** : Lorsque les nombres ne sont pas trop grands

**2. Méthode par soustractions successives :**

Elle s'appuie sur la propriété suivante : si a>b alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a – b)
Exemple : PGCD (261 ; 203) = PGCD (203 ; 58) *car 261 – 203 = 58*
Il suffit de poursuivre les soustractions

| | |
|---|---|
| 203 – 58 = 145 | PGCD (203 ; 58) = PGCD (145 ; 28) |
| 145 – 58 = 87 | = PGCD (87 ; 58) |
| 87 – 58 = 29 | = PGCD (58 ; 29) = **29** |
| 58 – 29 = **29** | |
| 29 – 29 = 0 | Le dernier résultat non nul est le PGCD cherché. |

### 3. Méthode par divisions successives : Algorithme d'Euclide

Elle s'appuie sur la propriété suivante :
**r** étant le reste de la division euclidienne de a par b, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; **r**)

**Exemple :** 

$$\begin{array}{r|l} 1078 & 322 \\ \hline 112 & 3 \end{array}$$

La propriété ci-dessus permet d'écrire
PGCD (1078 ; 322) = PGCD (322 ; 112)

Disposition pratique

| | dividende | diviseur | reste |
|---|---|---|---|
| étapes | a | b | r |
| 1 | 1078 | 322 | 112 |
| 2 | 322 | 112 | 98 |
| 3 | 112 | 98 | **14** |
| 4 | 98 | 14 | 0 |

Le PGCD est le dernier reste non nul

*Faire l'activité sur le tableur en cliquant* ici

# III Fractions irréductibles

**Exemples :** $\frac{12}{7}$ et $\frac{14}{27}$ sont irréductibles car on ne peut plus les simplifier.
Le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun autre que 1.
Ils sont donc premiers entre eux.

La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque les nombres a et b sont premiers entre

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible,
il faut la simplifier par le PGCD des nombres a et b

**Exemples :** Simplifier la fraction $\frac{1078}{322}$. Dans la question précédente, nous avons calculé le PGCD de 1078 et 322, c'est 14. Nous allons exprimer les deux nombres par un produit contenant 14

$\frac{1078}{322} = \frac{14 \times 77}{14 \times 23} = \mathbf{\frac{77}{23}}$ c'est la fraction irréductible**.**

De même en reprenant les exemples de cette leçon

$\frac{36}{48} = \frac{12 \times 3}{12 \times 4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

$\frac{261}{203} = \frac{29 \times 9}{29 \times 7} = \mathbf{\frac{9}{7}}$

**Exercices :** Simplifier les fractions suivantes pour les rendre irréductibles.

$\frac{37323}{16588}$ = ............................................= $\mathbf{\frac{9}{4}}$ *(le PGCD des 2 nombres est à calculer)*

$\frac{31929}{15047}$ = ............................................= ..........

Prouver que la fraction $\frac{684}{175}$ est irréductible.